Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ **Μονάδες 7**

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_o \in A$ **Μονάδες 4**

Α3. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναισωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ ισχύει ότι $f'(x)=\frac{1}{x^2}$
(μονάδες 2)

β) Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f , g ισχύει ότι $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
(μονάδες 2)

γ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. (μονάδες 2)

δ) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις. (μονάδες 2)

ε) Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, ισχύει ότι $P(A) > P(B)$(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα $A=\{\omega_1,\omega_4\}$ και $B=\{\omega_1,\omega_3\}$

Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $\{\omega_1\}$ και $\{\omega_3\}$ του Ω ισχύει ότι:

- $P(\omega_1)=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}$
- Η $P(\omega_3)$ ίση με το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ ως προς x , όταν x =1, όπου $f(x)=\frac{x}{3}\ln x,\ x>0$

Β1. Να αποδείξετε ότι $P(\omega_1)=\frac{1}{4}$ και $P(\omega_3)=\frac{1}{3}$ **Μονάδες 10**

Β2. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{3}\le P(A')\le\frac{3}{4}$ όπου Α΄ το συμπληρωματικό του Α. **Μονάδες 7**

Β3. Αν $P(A')=\frac{3}{4}$, τότε να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_2)$, $P(\omega_4)$, $P[(A-B)\cup(B-A)]$ και $P(A'-B')$, όπου Β΄το συμπληρωματικό του Β. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής Χ ,τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλατείς κλάσεις.
Δίνεται ότι:

• η μικρότερη παρατήρηση είναι 50
• η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι $x_4=85$
• η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης
• η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι δ = 75
και
• η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x}=74$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι c = 10 **Μονάδες 4**

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο σωστά **Μονάδες 8**

Κλάσεις	**Κεντρικές Τιμές** x_i	**Σχετική συχνότητα** f_i
[•,•)		
[•,•)		
[•,•)		
[•,•)		
Σύνολο		

Γ3. Δίνεται ότι $f_1 = 0,1$, $f_2 = 0,3$, $f_3 = 0,2$, και $f_4 = 0,4$

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων, που είναι μικρότερες του 80, είναι $\frac{200}{3}$

Μονάδες 7

Γ4. Επιλέγουμε κ παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος με κ < ν, οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή με
• το 2,5% των παρατηρήσεων αυτών να είναι τουλάχιστον 74
• το 16% των παρατηρήσεων αυτών να είναι το πολύ 68
Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων αυτών καθώς και να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x\ln x + κ,\ κ > 1$, όπου κ ακέραιος με κ > 1 και την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (1, f(1)) , η οποία σχηματίζει με τους άξονες, τρίγωνο εμβαδού Ε , με Ε < 2

Δ1. Να αποδείξετε ότι κ = 2 **Μονάδες 5**

Δ2. Έστω $x_1, x_2, ..., x_{50}$ οι τετμημένες 50 σημείων της (ε) των οποίων οι αντίστοιχες τεταγμένες τους έχουν μέση τιμή $\bar{y} = 31$

α) Να αποδείξετε ότι $\bar{x} = 30$ (μονάδες 2)

β) Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι :

Κάθε μία από τις τετμημένες $x_1, x_2, ..., x_{20}$ αυξάνεται κατά 3, οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά $λ \in \mathbb{R}$ με $λ > 0$.

Να βρείτε το λ, ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31(μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ3. Αν $\frac{1}{e} < α < β < γ < e$ με $α^α \cdot β^β \cdot γ^γ = e^7$ τότε να βρείτε το εύρος R και τη μέση τιμή των τιμών $f(α), f(β), f(γ), f(e), f'(\frac{1}{e})$, όπου $f(x) = x\ln x + 2$ **Μονάδες 7**

Δ4. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $Ω = \{t_n,\ n = 1,2,3,...,30 : 0 < t_1 < t_2 < ... < t_{10} < \frac{1}{e} < t_{11} < ... < t_{30} = 1\}$

με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, καθώς και τα ενδεχόμενα

$A = \{t \in Ω :$ η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης στο f στο σημείο (t, f(t))η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (t,f(t)), να σχηματίζει με τον άξονα x′x οξεία γωνία },

$B = \{t \in Ω : f(t) > f'(t) + 1\}$,όπου $f(x) = x\ln x + 2$.

Να βρεθούν οι πιθανότητες:

α) να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α (μονάδες 3)

β) να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β (μονάδες 4)

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. σελ. 28
Α2. σελ 14
Α3. σελ. 87
Α4. Λ – Σ – Λ – Λ - Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε,

$$P(ω_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{x^2+x+1})^2-1^2}{(x^3+x^2)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)(\sqrt{x^{+}x+1}+1)} =$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x}{x^2(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{1\cdot(\sqrt{1-1+1}+1)} = \frac{1}{4}$$

Ακόμη, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων με $f'(x) = \frac{\ln x}{3} + \frac{1}{3}, x > 0$, οπότε ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x για x=1 είναι $f'(1) = \frac{1}{3}$, άρα $P(ω_3) = \frac{1}{3}$.

Β2. Αφού $A = \{ω_1, ω_4\}$ και $Ω = \{ω_1, ω_2, ω_3, ω_4\}$, το $A' = \{ω_2, ω_3\}$, οπότε $P(A') = P(ω_2) + P(ω_3) = P(ω_2) + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3}$.

Επίσης, $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4} + P(\omega_4) \geq \frac{1}{4}$. Άρα $1 - P(A') \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(A') \leq \frac{3}{4}$

Β3. Έχουμε, $P(A') = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(\omega_4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(\omega_4) = 0$.

Ακόμη, έχουμε $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1 \overset{(B1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{4} + P(\omega_2) + \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{5}{12}$.

Έχουμε $A - B = \{\omega_4\}$ και $B - A = \{\omega_3\}$, $(A - B) \cup (B - A) = \{\omega_3, \omega_4\}$. Άρα

$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$.

$A' = \{\omega_2, \omega_3\}$ και $B' = \{\omega_2, \omega_4\}$. Άρα, $A' - B' = \{\omega_3\}$. Οπότε, $P(A' - B') = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $t_{\min}$ η ελάχιστη παρατήρηση, τότε έχουμε, $t_{\min} + 3c + \frac{c}{2} = x_4 \Leftrightarrow 50 + \frac{7c}{2} = 85 \Leftrightarrow c = 10$

Γ2. Έχουμε, $\delta = 75$ άρα πρέπει $f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} = 0,5$ (1), όμως $f_4 = 2f_3$ (2) και ισχύει

$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f_1 + f_2 + 3f_3 = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 1 - 3f_3 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 0,5 - \frac{f_3}{2} = 1 - 3f_3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f_3 = 0,2$. Άρα από την (2) προκύπτει $f_4 = 0,4$.

Τότε έχουμε $f_1 + f_2 = 0,4 \Leftrightarrow f_2 = 0,4 - f_1$ (3)

Όμως $\bar{x} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 \Leftrightarrow 74 = 55f_1 + 65f_2 + 75 \cdot 0,2 + 85 \cdot 0,4 \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 74 = 55f_1 + 65(0,4 - f_1) + 49 \Leftrightarrow f_1 = 0,1$. Αφού οι κεντρικές τιμές x_i απέχουν $c = 10$ και είναι $x_1 = 55, x_2 = 65, x_3 = 75$. Επομένως $f_2 = 0,3$ από την (3).

Έτσι ο πίνακας είναι

Κλάσεις	x_i	f_i
$[50,60)$	55	0,1
$[60,70)$	65	0,3
$[70,80)$	75	0,2
$[80,90)$	85	0,4
		1

Γ3. Για την 4^{η} κλάση έχουμε $f_4 = \frac{v_4}{v} \Leftrightarrow v_4 = vf_4$ (5).

Το νέο πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80 θα είναι $v' = v - 0,4v = 0,6v$. Έτσι η ζητούμενη μέση τιμή είναι, $\bar{x}' = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3}{v'}$

όμως $f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow vf_i = v_i$, για $i = 1,2,3$ έτσι

$$\bar{x}' = \frac{x_1 f_1 v + x_2 f_2 v + x_3 f_3 v}{0,6v} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3}{0,6} = \frac{40}{0,6} = \frac{200}{3}.$$

Γ4. Αφού το δείγμα ακολουθεί την κανονική κατανομή και το 2,5% των παρατηρήσεων είναι τουλάχιστον 74 έχουμε $\bar{x} + 2s = 74$ (6) και το 16% είναι το πολύ 68 έχουμε $\bar{x} - s = 68$ (7). Από το σύστημα των (6) και (7) προκύπτει $s = 2$ και $\bar{x} = 70$.

Επομένως ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{70} < \frac{1}{10}$ άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $f'(x) = \ln x + 1$, $x > 0$ με $f(1) = \kappa$ και $f'(1) = 1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο σημείο $(1, f(1))$ είναι ε: $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - \kappa = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x + \kappa - 1$

Για x = 0: $y = \kappa - 1$ άρα η ε τέμνει τον y΄y στο σημείο (0, κ – 1)

Για y = 0: $x = 1 - \kappa$ άρα η ε τέμνει τον x΄x στο σημείο (1-κ, 0)

$$E = \frac{1}{2}|\kappa-1||1-\kappa| = \frac{1}{2}|\kappa-1||\kappa-1| = \frac{1}{2}|\kappa-1|^2 = \frac{1}{2}(\kappa-1)^2$$

$$E < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\kappa-1)^2 < 2 \Leftrightarrow (\kappa-1)^2 < 4 \Leftrightarrow |\kappa-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < \kappa-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 3$$

Αφού κ > 1 τότε 1 < κ < 3 και αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$ τότε κ = 2 .

Δ2. **α)** Για κ = 2 η εφαπτόμενη είναι (ε) : y = x + 1. Οι τεταγμένες των σημείων της ε εκφράζονται από την μεταβλητή Y = X + 1. Άρα $\bar{y} = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow 31 = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow \bar{x} = 30$

β) Έστω $\overline{x'}$ η νέα μέση τιμή. Άρα:

$$\overline{x'} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} x_i' \Leftrightarrow 30 = \frac{1}{50}\left(\sum_{i=1}^{50} x_i + 20\cdot 3 - 15\lambda\right) \Leftrightarrow 31\cdot 50 = 50\bar{x} + 60 - 15\lambda \Leftrightarrow 1550 = 50\cdot 30 + 60 - 15\lambda \Leftrightarrow 15\lambda = 10 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Δ3. Για κ = 2 : $f(x) = x\ln x + 2$ άρα $f'(x) = \ln x + 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Στο διάστημα $[\frac{1}{e}, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα. Άρα $\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\frac{1}{e}) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$

$\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{e} < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < e + 2$. Όπου $f'(\frac{1}{e}) = \ln\frac{1}{e} + 1 = 0$. Άρα οι παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά είναι

$f'(\frac{1}{e}) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$ και $R = f(e) - f'(\frac{1}{e}) = e + 2 - 0 = e + 2$

$\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = e^7 \Leftrightarrow \ln(\alpha^\alpha\beta^\beta\gamma^\gamma) = \ln e^7 \Leftrightarrow \ln\alpha^\alpha + \ln\beta^\beta + \ln\gamma^\gamma = 7 \Leftrightarrow \alpha\ln\alpha + \beta\ln\beta + \gamma\ln\gamma = 7 \Leftrightarrow$

$\alpha\ln\alpha + 2 + \beta\ln\beta + 2 + \gamma\ln\gamma + 2 = 13 \Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = 13$

$$\bar{x} = \frac{f'(\frac{1}{e}) + f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e)}{5} = \frac{e + 15}{5} = 3 + \frac{e}{5}$$

Δ4. **α)** Για να σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (t, f(t)) οξεία γωνία με τον $x'x$ αρκεί $f'(t) > 0 \Leftrightarrow \ln t + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln t > -1 \Leftrightarrow t > \frac{1}{e}$. Άρα $A = \{t_{11}, t_{12}, ..., t_{30}\}$ και $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

β) $f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow t\ln t + 2 > \ln t + 1 + 1 \Leftrightarrow t\ln t > \ln t \Leftrightarrow \ln t(t-1) > 0$ (1)

Όμως $0 < t_n < 1$ για κάθε n = 1, 2,...,29 άρα lnt < 0 και t – 1 <0. Άρα η (1) ισχύει για κάθε n = 1, 2, ,..., 29.

Για $t = t_{30} = 1$ η (1) δεν ισχύει. Άρα $B = \{t_1, t_2, ..., t_{29}\}$ και $P(B) = \frac{29}{30}$. Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το :

$A \cap B = \{t_{11}, t_{12}, ..., t_{29}\}$ και $P(A \cap B) = \frac{19}{30}$.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΥΡΟΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ• ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΣΠΛΗΝΗΣ ΝΙΚΟΣ •ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ